Université d'Orléans
ECOLE SUPERIEURE DE L'ENERGIE ET DES MATERIAUX

EPREUVES D'ADMISSION 1986 - Option C

MATHEMATIQUES

(Durée 4 h - Coefficient 4)

Le soin apporté aux calculs à effectuer, ainsi que la rigueur du raisonnement seront des éléments très importants d'appréciation.

PREAMBULE

Dans tout le problème, on note :

(N_1) : $\phi : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \end{cases}$ et on rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)dt = 1$

(N_2) : Pour tout n dans $\mathbb{N}$: $H_n : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (-1)^n . \dfrac{\phi^{(n)}(x)}{\phi(x)} \end{cases}$

où $\phi^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{ième}$ de ϕ, c'est-à-dire encore que :

$$H_n(x) = (-1)^n . e^{\frac{x^2}{2}} . \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

(N_3) : Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\phi_n : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto n\phi(nx) = \dfrac{n}{\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{n^2x^2}{2}} \end{cases}$

(N_4) : $\mathcal{P}$ désigne l'espace vectoriel réel des fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{P}_n$ le sous-espace des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n, avec n dans $\mathbb{N}$.

PREMIERE PARTIE

I.1 a) Justifier l'existence de $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n}\,\phi(t)dt$, pour tout n dans $\mathbb{N}$.

b) Etablir une relation entre I_n et I_{n+1}, pour tout n dans $\mathbb{N}$.

c) Exprimer I_n en fonction de $\frac{(2n)!}{n!}$, pour tout n dans $\mathbb{N}$.

d) A quoi correspond le calcul de I_n en probabilités ?

I.2 a) Calculer, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt}.\phi(t)dt$.

b) Vérifier que si T est une variable aléatoire de densité ϕ, alors son espérance E(T) vaut G'(0) et sa variance V(T) vaut G"(0).

I.3 Déterminer le rayon de convergence de la série entière de la variable réelle x :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k . \frac{I_k x^{2k}}{(2k)!}$$

(où I_k est défini en I.1), et en utilisant la valeur de I_k déterminée en I.1.c, préciser la valeur de f(x).

I.4 Justifier l'existence, pour tout x dans $\mathbb{R}$, de : $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\cos(xt)dt$.

I.5 a) Pour tous n dans $\mathbb{N}$, t et x dans $\mathbb{R}$, on pose :

$$R_n(t,x) = \cos(xt) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k . \frac{(xt)^{2k}}{(2k)!}$$

Prouver que : $|R_n(t,x)| \leq \dfrac{(xt)^{2n+2}}{(2n+2)!}$

b) Conclure alors, que pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a : $f(x) = F(x)$.

T.S.V.P

DEUXIEME PARTIE

II.1 Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, la fonction H_n définie en (N_2) dans le préambule est une fonction polynôme de degré n (polynômes d'Hermite), ayant la parité de n, et prouver les relations suivantes pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout x dans $\mathbb{R}$:

(i) $x\,H_n(x) - H'_n(x) = H_{n+1}(x)$

(ii) $H'_{n+1}(x) = (n+1)\,H_n(x)$ et $H''_n(x) - x\,H'_n(x) + n\,H_n(x) = 0$

(iii) $H_{n+2}(x) - x.H_{n+1} + (n+1)\,H_n(x) = 0$.

II.2 a) Expliciter H_0, H_1, H_2, H_3 et préciser leurs racines.

b) D'une façon générale, préciser le coefficient dominant de H_n (c'est-à-dire le coefficient du terme de plus haut degré dans H_n) et $H_n(0)$.

II.3 a) Soit n dans $\mathbb{N}$ et $\Delta : \mathcal{P}_n \longrightarrow \mathcal{P}_n$ tel que :

$$\forall P \in \mathcal{P}_n \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Delta(P)(x) = P''(x) - x\,P'(x).$$

Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathcal{P}_n$ diagonalisable : on précisera notamment ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

b) Δ est-il injectif ? surjectif ? Quel est le rang de Δ ?

II.4 a) Pour n dans $\mathbb{N}$, fixé, on considère une fonction y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivable et solution de l'équation différentielle :

$$(E_n) : \forall x \in \mathbb{R} \quad y''(x) + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}\right) y(x) = 0$$

Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $z : x \mapsto e^{\frac{x^2}{4}}.\,y(x)$

En déduire que la fonction : $h_n : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{4}}.\,H_n(x)$ est solution de (E_n) ; et écrire une relation liant les coefficients du développement en série entière d'une solution de (E_n) : qu'en concluez-vous ?

b) En étudiant $(h_n h'_n)'$, prouver que les éventuels zéros réels de H_n sont tous inférieurs strictement à $\sqrt{4n+2}$.

II.5 On considère une solution Y_n de l'équation différentielle :

$$(E'_n) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad y''(x) + (n + \tfrac{1}{2})\,y(x) = 0$$

a) Donner la forme générale de la solution de cette équation, et montrer qu'on peut toujours s'arranger pour choisir Y_n s'annulant exactement sur : $\left\{ \dfrac{\theta + k\pi}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}} \;\middle/\; k \in \mathbb{Z} \right\}$ où θ est un nombre réel choisi arbitrairement.

b) Soit $W_n = h_n Y'_n - Y_n h'_n$; en étudiant cette fonction, prouver qu'entre deux zéros éventuels réels consécutifs de H_n se trouve au moins un zéro de Y_n. Quelle conclusion en tirez-vous quant aux zéros de H_n ?

II.6 On considère deux entiers n et m dans $\mathbb{N}$, distincts. En considérant l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left[h''_n(x)\,h_m(x) - h_n(x)\,h''_m(x)\right] dx,$

prouver que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(x)\,h_m(x)\,dx = 0$

II.7 a) Montrer pour tous P et Q dans $\mathcal{P}$, l'existence de :

$$\langle P,Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,\phi(t)\,dt.$$

b) Montrer que si m et n sont dans $\mathbb{N}^*$, alors : $\langle H_n, H_m \rangle = \langle H_{m-1}, H'_m \rangle$.

c) Calculer, pour tous m et n dans $\mathbb{N}$, la valeur de $\langle H_n, H_m \rangle$.

II.8 Pour tous P dans $\mathcal{P}$ et k dans $\mathbb{N}$, on note $\tilde{P}_k = \dfrac{\langle P, H_k \rangle}{\langle H_k, H_k \rangle}$

Montrer que si P est dans $\mathcal{P}_n$ (avec n dans $\mathbb{N}$) alors :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \tilde{P}_k.H_k \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left[P(t)\right]^2 \phi(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \left[\tilde{P}_k\right]^2 \langle H_k, H_k \rangle.$$

II.9 Prouver que pour tout entier n, $n \geqslant 2$, H_n possède n racines réelles distinctes, deux consécutives d'entre elles étant séparées par une racine de H_{n-1}.

TROISIEME PARTIE

III.1 Soit a fixé dans $\mathbb{R}$ et $L_a(t) = e^{at - \frac{t^2}{2}}$ pour t dans $\mathbb{R}$.

Montrer que L_a est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, admettant un développement de la forme :

$$L_a(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{Q_n(a)}{n!} t^n$$

où $Q_n(a)$ est un polynôme en a que l'on explicitera, ou tout au moins dont on précisera le degré.

III.2 En calculant $L_a'(t)$, justifier que pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$Q_{n+2}(a) - a\, Q_{n+1}(a) + (n+1)\, Q_n(a) = 0$$

Conclure pour tout n dans $\mathbb{N}$ et a dans $\mathbb{R}$: $Q_n(a) = H_n(a)$.

III.3 Prouver que pour tous a et b dans $\mathbb{R}$ et n dans $\mathbb{N}$, on a :

$$H_n(a+b) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot H_{n-k}(a).b^k$$

III.4 Prouver que pour tous x dans $\mathbb{R}$ et n dans $\mathbb{N}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x+t)\ \phi(t)dt = x^n.$$

QUATRIEME PARTIE

IV.1 a) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la fonction ϕ_n (définie dans le préambule en (N_3)) peut être considérée comme la densité d'une certaine variable aléatoire T_n définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, et dont on précisera l'espérance et la variance.

b) Pour tout ε strictement positif, calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\int_0^{\varepsilon} \phi_n(t)dt \right] \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} \phi_n(t)dt \right]$$

c) En déduire que la suite de variables $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine nulle. Ce résultat pouvait-il être obtenu autrement ?

IV.2 a) Soit ℓ une fonction continue sur $\mathbb{R}$, bornée et telle que $\ell(0) = 0$.

Montrer que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ell(x)\, \phi_n(x)dx$$

existe et tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$, bornée. Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, \phi_n(x)dx,$$

et pour tout y dans $\mathbb{R}$ la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$g_n(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x+y)\, \phi_n(x)dx.$$

c) Examiner de même la limite éventuelle de $g_n(y)$ lorsque n tend vers $+\infty$ (pour y dans $\mathbb{R}$, fixé) où $g_n(y)$ est défini comme ci-dessus lorsque g est l'une des fonctions (continues, mais non bornées) définies par : $g(x) = x^2$ ou $g(x) = x^4$.

(Il est recommandé d'utiliser des calculs déjà effectués).

CINQUIEME PARTIE

V.1 a) On considère à nouveau la fonction h_n définie en II.4.a.

Pour tous n dans $\mathbb{N}$ et x dans $\mathbb{R}$, montrer l'existence de :

$$\hat{h}_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{tx + n\pi}{2}\right) \cdot h_n(t)dt.$$

b) Calculer $\hat{h}_0(x)$, $\hat{h}_1(x)$ et $\hat{h}_2(x)$. Que constatez-vous ?
